SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2002-2003

Daniele Morbidelli

LA DISUGUAGLIANZA DI POINCARÉ PER CAMPI VETTORIALI NON REGOLARI DI PASSO DUE

10 giugno 2003

Tecnoprint - Bologna 2005

Riassunto.

Si discute quali sono le condizioni di regolarita' minimali su una famiglia di campi vettoriali $X_1, \ldots, X_m$ di passo 2 in $\mathbb{R}^n$ affinché valga la disuguaglianza di Poincaré sui dischi della matrica di controllo.

Abstract.

We discuss the minimal regularity assumptions on a family $X_1, \ldots, X_m$ of vector fields of step 2 in $\mathbb{R}^n$ which ensure the validity of the Poincaré inequality for the control distance.

Consideriamo una famiglia $X_1, \ldots, X_m$ di campi vettoriali in $\mathbb{R}^n$. Un problema collegato con lo studio dell'operatore $\sum X_j^2$ e' quello di dare condizioni sufficienti affinché valgano: (i) la proprietà di doubling e, (ii) la disuguaglianza di Poincaré per la distanza di controllo associata ai campi. Questo problema e' stato ben studiato nel caso di campi regolari che soddisfino la condizione di Hörmander. In questo caso le dette proprietà sono state provate da Nagel Stein e Wainger [14] e da Jerison [7]. Questi lavori richiedono la regolarità C^k dei coefficienti per qualche k grande e apparentemente difficile da precisare. Nel caso di campi diagonali uno studio di struttura delle palle e una disuguaglianza di Poincaré sono state provate da Franchi e Lanconelli [1] in condizioni di regolarità bassa.

Nel recente lavoro con Lanconelli [9] si dà un metodo per la prova della disuguaglianza di Poincaré secondo uno schema che richiede solo la regolarita' C^1 dei campi, ma si appoggia su una "rappresentabilità" dei dischi della metrica con *mappe quasi esponenziali controllabili* (si veda [9, Theorem 2.1]). Lo scopo del lavoro [12] che presentiamo qui e' quello di mostrare che, nel caso di campi di passo 2, gli strumenti necessari per mettere in opera lo schema di dimostrazione di [9] possono essere sviluppati in condizioni di regolarita' minimale sui campi (si assume che siano lipschitziani tutti i campi vettoriali coinvolti nello statement della condizione sul rango).

Una caratteristica del risultato che presentiamo e' quella di evitare (a prezzo di un calcolo diretto un po' lungo ma molto espliciito, si veda la "formula esatta" nel Lemma 4) l'uso dell'apparato formale della formula di Campbell Hausdorff.

Nel seguito indichiamo con $d(x,y)$ la distanza di controllo tra due punti e con $B(x,r)$ la d-palla centrata in x e di raggio r.

Enunciamo ora le ipotesi sui campi. Scriviamo $X_j = \sum_{k=1}^n f_j^k \partial_k$, $j = 1, \ldots, m$. Assumiamo che le f_j siano localmente lipschitziane e che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $j, k = 1, \ldots, m$, le derivate

$$(X_j f_k - X_k f_j)(x) = \frac{d}{dt}\Big(f_k(e^{tX_j}x) - f_j(e^{tX_k}x)\Big)\Big|_{t=0}$$

esistano. Richiediamo in più che le funzioni $X_j f_k - X_k f_j$ siano continue per ogni j, k (qui $t \mapsto e^{tX_j}x$ indica la curva integrale di X_j che parte da x al tempo 0). Scriviamo poi $[X_j, X_k] = \langle X_j f_k - X_k f_j, \nabla\rangle := \sum_{i=1}^n f_{j,k}^i \partial_i$. Richiediamo che valga la condizione di Hörmander

$$\operatorname{span}\{X_j(x), [X_j, X_k](x) : j, k = 1, \ldots, m\} = \mathbb{R}^n, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Assumiamo infine che per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ esista $L > 0$ tale che

$$|f_{j,k}(x) - f_{j,k}(y)| \le L d(x,y), \tag{2}$$

per ogni $x, y \in K$. Osserviamo che grazie alla recente versione nonsmooth del teorema di Chow provata da Rampazzo e Sussman [15], la topologia definita da d è quella euclidea. Quindi, grazie a [5] e [3], la d–lipschitzianita' (2) di $f_{j,k}$ e' equivalente alla limitatezza delle derivate distribuzionali lungo i campi, cioe'

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in K} |X_i f_{j,k}(x)| \leq L, \quad \text{per ogni } i, j = 1, \ldots, m, \ k = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Fissato il solito compatto K, poniamo

$$L = \sum_{j=1}^{m} \|\nabla f_j\|_{L^\infty(K)} + \sum_{j,i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{ess\,sup}_{K} |X_i f_{j,k}|. \tag{4}$$

Tutte le costanti negli enunciati sotto dipendono da (4).

Un esempio di campi che soddisfano le ipotesi fatte è il seguente:

Esempio 1 Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i campi

$$X_1 = \partial_{x_1} - x_2\varphi(x_1, x_3)\partial_{x_3}, \quad X_2 = \partial_{x_2}$$

con φ lipschitziana e che soddisfa $|\varphi| \geq c > 0$. In ogni punto esiste il commutatore $[X_1, X_2] = \varphi(x_1, x_3)\partial_{x_3}$ ed e' Lipschitziano. Entrambe le ipotesi (1) e (2) sono quindi soddisfatte.

Dati 2 campi X ed Y, definiamo localmente il "commutatore approssimato" $\exp^*(s[X, Y])$ nel modo seguente:

$$\exp^*(s[X,Y])(x) = \begin{cases} e^{-\sqrt{s}Y} e^{-\sqrt{s}X} e^{\sqrt{s}Y} e^{\sqrt{s}X} x & \text{se } s \geq 0, \\ e^{-\sqrt{|s|}X} e^{-\sqrt{|s|}Y} e^{\sqrt{|s|}X} e^{\sqrt{|s|}Y} x & \text{se } s \leq 0. \end{cases} \tag{5}$$

Indichiamo i campi e i loro commutatori con

$$Y_j = X_j, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \{Y_{m+1}, \ldots, Y_q\} = \{[X_i, X_j], 1 \leq i < j \leq m\}.$$

Definiamo inolre il "grado" $d(Y_j)$ come la lunghezza del campo Y_j come commutatore. Data una n-upla $I = (i_1, \ldots, i_n), i_j = 1, \ldots, q$, definiamo la "mappa quasi esponenziale" associata ad I nel modo seguente:

$$E_I(x, h) = \Big(\prod_{k=1}^{n} \exp^*(h_k Y_{i_k})\Big)(x) := \Big(\exp^*(h_1 Y_{i_1}) \circ \cdots \circ \exp^*(h_n Y_{i_n})\Big)(x) \tag{6}$$

dove, se $d(Y_{i_k}) = 1$, allora $\exp^*(h_k Y_{i_k})(x) = \exp(h_k Y_{i_k})(x)$, mentre se $d(Y_{i_k}) = 2$ (per esempio $Y_{i_k} = [X_{p_k}, X_{l_k}]$ per opprtuni $p_k, l_k \in \{1, \ldots, m\}, p_k < l_k$) allora $\exp^*(h_k Y_{i_k})(x)$

e' definito in (5). Le mappe E_I sono state gia' studiate nel caso regolare, si veda [14], [8], [17], [13]. Qui stabiliremo alcune loro proprieta' in condizioni di bassa regolarita'.

Le sfere metriche risulteranno essere equivalenti alle I-scatole, definite da

$$\mathrm{Box}_I(x,r) = \Big\{x + \sum_{k=1}^{n} \xi_k Y_{i_k}(x), \|\xi\|_I \le r\Big\}, \quad \|\xi\|_I = \max_{j=1,\dots,n} |\xi_j|^{1/d(Y_{i_j})}. \tag{7}$$

Il risultato e' il seguente:

Teorema 2 *Preso un compatto K, per ogni $x \in K$ e $r < r_0$ c'e' una n-upla I tale che*

$$B(x,\varepsilon_2 r) \subset \mathrm{Box}_I(x,\varepsilon_1 r) \subset \{E_I(x,h) : \|h\|_I \le \varepsilon_0 r\} \subset B(x, C\varepsilon_0 r) \tag{8}$$

dove E_I e' la mappa definita in (6). *Le costanti $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, r_0$ dipendono solo da K ed L in* (4).

Questo risultato e' un parziale miglioramento di un recente risultato di Rampazzo e Sussman [15], nel quale si prova che, data una opportuna definizione di commutatore di campi Lipschitziani e di "condizione di Hörmander", la palla di controllo $B(x,r)$ di raggio r contiene la palla euclidea $B_{Eucl}(x, cr^2)$ per raggi abbastanza piccoli.

Il Teorema 2 da' la rappresentazione dei dischi di controllo tramite la mappa E_I, che e' *controllabile* nel senso di [9]. Quindi la doubling e la Poincaré valgono.

Teorema 3 *Preso un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ esistono $c, r_0, Q \ge n, \lambda \ge 1$, dipendenti da K ed L in* (4), *tali che*

$$|B(x,2r)| \le 2^Q |B(x,r)|, \quad x \in K, r < r_0, \tag{9}$$

e

$$\int_B |u(y) - u_B| dy \le cr \int_{\lambda B} |Xu(x)| dx, \quad \forall u \in C^1(\lambda B) \tag{10}$$

dove $B = B(x,r)$ e $\lambda B = B(x, \lambda r)$. Qui $u_B = \fint_B u = \frac{1}{|B|}\int_B u$.

Ricordiamo che le disuguaglianze (9) e (10) sono gli strumenti di base per uno studio della teoria degli Spazi di Sobolev di ordine uno associati ai campi X_j, si vedano ad esempio le referenze Saloff-Coste [16], Maheux e Saloff Coste [10], Franchi Lu e Wheeden [2], Garofalo e Nhieu [4] e Hajłasz e Koskela [6].

Passiamo ora a una breve descrizione degli strumenti utilizzati. La cosa principale e' ottenere stime sufficientemente precise della matrice jacobiana della funzione $h \mapsto E_I(x,h)$ definita in (6). Tutto puo' essere fatto per campi C^∞, purche' si abbia cura di tenere sotto controllo il fatto che le costanti dipendano solo da L in (4).

Il primo risultato e' la seguente "formula esatta", che fa le veci della approssimazione di Campbell Hausdoff:

Lemma 4 *Data una coppia X e Y di campi smooth, data una qualsiasi funzione $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, per $s > 0$ piccolo vale quanto segue:*

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}u(e^{-\sqrt{s}Y}e^{-\sqrt{s}X}e^{\sqrt{s}Y}e^{\sqrt{s}X}x) \\
&= \frac{1}{2}[X,Y](ue^{-\sqrt{s}Y})(e^{-\sqrt{s}X}e^{\sqrt{s}Y}e^{\sqrt{s}X}x) + \frac{1}{2}[X,Y](ue^{-\sqrt{s}Y}e^{-\sqrt{s}X})(e^{\sqrt{s}Y}e^{\sqrt{s}X}x) \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{s}}\int_0^{\sqrt{s}}\int_0^t [X,[X,Y]]\Big(ue^{-\sqrt{s}Y}e^{-\tau X}\Big)\Big(e^{(\tau-\sqrt{s})X}e^{\sqrt{s}Y}e^{\sqrt{s}X}x\Big)d\tau dt \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{s}}\int_0^{\sqrt{s}}\int_0^t [[X,Y],Y](ue^{-\sqrt{s}Y}e^{-\sqrt{s}X}e^{\tau Y})(e^{(-\tau+\sqrt{s})Y}e^{\sqrt{s}X}x)d\tau dt.
\end{aligned}$$

La prova si basa sul teorema fondamentale del calcolo e sulla "definizione" di commutatore

$$\frac{d}{dt}Y(u \circ e^{-tX})(e^{tX}x) = [X,Y](ue^{-tX})(e^{tX}x).$$

Una volta provato il Lemma si tratta di riconoscere che la matrice jacobiana della funzione $E_I(x,\cdot)$ si approssima come segue:

Proposizione 5 *Sia $I = (i_1,\dots,i_n)$, si ponga $Y_{i_k} = U_k$, $k = 1,\dots,n$. Allora, per ogni $j = 1,\dots,n$,*

$$\frac{\partial}{\partial h_j}E_I(x,h) = U_j(x) + R_j(x,h),$$

dove, dato un compatto K, c'e' un opportuno intorno V dell'origine tale che il resto R_j soddisfa la stima

$$\sup_{x\in K}|R_j(x,h)| \le C\|h\|_I, \quad h \in V. \tag{11}$$

Introduciamo ora, scelta una palla $B(x,r)$, un "criterio di selezione" per la mappa esponenziale $E_I(x,\cdot)$ candidata a rappresentare la palla. Questo criterio è basato sulle idee oramai classiche di Nagel Stein e Wainger [14]. Presa una n-tupla $I = (i_1,\dots,i_n) \in \{1,\dots,q\}^n$, scriviamo $d(I) = \sum_{j=1}^n d(Y_{i_j})$ e

$$\lambda_I(x) = \det[Y_{i_1}(x),\dots,Y_{i_n}(x)]. \tag{12}$$

Per la condizione di Hörmander di passo 2 (1), per ogni x c'è una n-pla I tale che $\lambda_I(x) \neq 0$.

Il Teorema 2 e' una conseguenza del seguente teorema.

Teorema 6 *Dato un compatto K, esiste un intorno V dell'origine in $\mathbb{R}^n$ tale che la mappa $E_I(x,\cdot)$ e' lipschitziana V per ogni I e per ogni $x \in K$. Inoltre esistono $r_0 > 0$, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tali che, se $x \in K$, $r < r_0$, e I soddisfano*

$$|\lambda_I(x)|r^{d(I)} > \frac{1}{2}\max_{J\in\{1,\dots,q\}^n}|\lambda_J(x)|r^{d(J)}, \tag{13}$$

allora

(i) $\frac{1}{2}|\lambda_I(x)| \leq \left|\det \frac{\partial E_I}{\partial h}(x,h)\right| \leq 2|\lambda_I(x)|$ *per quasi ogni* $h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\|_I \leq \varepsilon_0 r$.

(ii) La mappa $E_I(x,\cdot)$ *è iniettiva su* $\{\|h\|_I \leq \varepsilon_0 r\}$.

(iii) $\mathrm{Box}_I(x,\varepsilon_1 r) \subset \{E_I(x,h) : \|h\|_I \leq \varepsilon_0 r\}$.

(iv) $B(x,\varepsilon_2 r) \subset \mathrm{Box}_I(x,\varepsilon_1 r)$.

La prova del teorema è basata sull'idea di riscrivere l'uguaglianza nella proposizione (5) nel modo seguente:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial E_I(x,h)}{\partial h_j} = U_j(x) + \sum_{k=1}^{n} b_{j,k} U_k(x), \\ &\text{dove } |b_{j,k}| = |b_{j,k}(x,h)| \leq \chi r^{d(U_k)-d(U_j)} \ \forall\ h,\ \|h\|_I < \varepsilon_0 r. \end{aligned} \tag{14}$$

Qui χ e' una costante che puo' essere resa piccola se ε_0 e' scelto opportunamente piccolo. Questo permette in definitiva di scrivere la matrice jacobiana di E come prodotto

$$\frac{\partial}{\partial h} E_I(x,h) = U(x)(I_n + B^T(x,h)).$$

A questo punto, si puo' calcolare il determinante e ottenere, grazie a (14),

$$\det \frac{\partial}{\partial h} E_I(x,h) = \det U(x) \det(I + B^T(x,h)) \simeq \det U(x),$$

se χ in (14) e' stato scelto opportunamente piccolo. La prova di (i) essenzialmente è conclusa. Le prove di (ii), (iii) e (iv) sono un po' piu' elaborate.

Una volta che si ha a disposizione il Teorema (6), la proprieta' di doubling segue con relativa facilita'dall'equivalenza $c^{-1}\Lambda(x,r) \leq |B(x,r)| \leq c\Lambda(x,r)$, dove $\Lambda(x,r) = \sum_I |\lambda_I(x)| r^{d(I)}$. Infatti, presi x ed r e scelta I tale che (13) vale, si ha $|B(x,\varepsilon_2 r)| \leq |\mathrm{Box}_I(x,\varepsilon_1 r)| = |\lambda_I(x)|(\varepsilon_1 r)^{d(I)} \leq c\Lambda(x,\varepsilon_2 r)$. La stima da sotto e' analoga.

Riguardo alla disuguaglianza di Poincaré si segue lo schema in [9]. Precisamente, si fissa una palla $B(x_0,\varepsilon_2 r)$. Presi x e I che soddisfino (13), grazie al Teorema 6, la mappa $h \mapsto E_I(x,h)$ e' inoiettiva su $Q_I(\varepsilon_0 r) = \{\|h\|_I \leq \varepsilon_0 r\}$ con $\varepsilon_0 > \varepsilon_1$ e il suo jacobiano soddisfa $\frac{1}{2}|\lambda_I(x)| \leq |\det \frac{\partial E_I}{\partial h}(x,h)| \leq 2|\lambda_I(x)|$, per quasi ogni h, $\|h\|_I \leq \varepsilon_0 r$. Inoltre, (8) da' $\mathrm{Box}_I(x,\varepsilon_1 r) \subset \{E_I(x,h) : \|h\|_I \leq \varepsilon_0 r\}$. Nel linguaggio del lavoro [9], questo significa che, ponendo

$$\Omega_I = \left\{x \in B(x_0,\varepsilon_2 r) : |\lambda_I(x)| r^{d(I)} > \frac{1}{2} \max_J |\lambda_J(x)| r^{d(J)}\right\},$$

la mappa $E_I : \Omega_I \times Q_I(\varepsilon_0 r)$ e' una mappa *quasi esponenziale*. Inoltre, possiamo scegliere I tale che $|\Omega_I| \geq \frac{1}{N}|B(x_0,\varepsilon_2 r)|$ dove N e' il numero totale di n-ple.

La *controllabilita'* in [9] richiede che esista $\gamma : \Omega_I \times Q_I(\varepsilon_0 r) \times [0,cr]$ tale che:

(C1) Per ogni $(x,h) \in \Omega_I \times \{\|h\|_I \leq \varepsilon_0 r\}$, $t \mapsto \gamma(x,h,t)$ e' un cammino subunitario che connette x ed $E_I(x,h)$, i.e. $\gamma(x,h,0) = x$, $\gamma(x,h,T(x,h)) = E_I(x,h)$ per un opportuno $T(x,h) \leq cr$.

(C2) Per ogni $(h,t) \in Q_I(\varepsilon_0 r) \times [0,cr]$, $x \mapsto \gamma(x,h,t)$ e' una mappa iniettiva con derivate prime continue e Jacobiano lontano da zero, cioè $\inf_{\Omega_I \times Q_I(\varepsilon_0 r)\times[0,cr]} \left|\det \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right| \geq c > 0$.

I punti x e $E_I(x,h)$ possono essere collegati da una curva che e' a tratti curva integrale dei campi X_j. La costruzione e' intuitiva, e puo' essere formalizzata come segue: poniamo $x_j = \prod_{i=j+1}^{n} \exp^*(h_i U_i)x$. Sia $h_j \geq 0$. Se $d(U_j) = 1$, allora poniamo let $\gamma_j(t) = e^{tU_j} x_j$ per $0 \leq t \leq h_j$. Se invece $d(U_j) = 2$, ad esempio $U_j = [X_{p_j}, X_{l_j}]$, allora poniamo

$$\gamma_j(t) = \begin{cases} e^{tX_{p_j}} x_j & 0 \leq t \leq \sqrt{h_j}, \\ e^{(t-\sqrt{h_j})X_{l_j}} e^{\sqrt{h_j}X_{p_j}} x_j & \sqrt{h_j} \leq t \leq 2\sqrt{h_j}, \\ e^{-(t-2\sqrt{h_j})X_{p_j}} e^{\sqrt{h_j}X_{l_j}} e^{\sqrt{h_j}X_{p_j}} x_j & 2\sqrt{h_j} \leq t \leq 3\sqrt{h_j}, \\ e^{-(t-3\sqrt{h_j})X_{l_j}} e^{-\sqrt{h_j}X_{p_j}} e^{\sqrt{h_j}X_{l_j}} e^{\sqrt{h_j}X_{p_j}} x_j & 3\sqrt{h_j} \leq t \leq 4\sqrt{h_j}. \end{cases}$$

E' facile constatare che il cammino $\gamma = \gamma_n + \cdots + \gamma_1$ soddisfa entrambe le condizioni (C1) e (C2). La mappa $x \mapsto \gamma(x,h,t)$ non e' di classe C^1 come richiesto in [9], ma e' un cambio di variabile Lipschitziano e questo e' sufficiente per la prova in [9].

Riferimenti bibliografici

[1] Franchi, B. and Lanconelli, E., *Hölder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **10** (1983), 523–541.

[2] Franchi, B., Lu, G. and Wheeden, R., *A relationship between Poincaré type inequalities and representation formulas in spaces of homogeneous type,* Internat. Math. Res. Notices, 1996, no. 1, 1–14.

[3] Franchi, B. Serapioni R. and Serra Cassano, F., *Approximation and Imbedding Theorems for Weighted Sobolev Spaces Associated with Lipschitz Continuous Vector Fields,* Boll. Un. Mat. Ital. B (7) **11** (1997), no. 1, 83–117.

[4] Garofalo, N. and Nhieu, D. M., *Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces,*Comm. Pure Appl. Math. **49** (1996), 1081–1144.

[5] Garofalo, N., Nhieu, D. M., *Lipschitz continuity, global smooth approximations and extension theorems for Sobolev functions in Carnot-Carathodory spaces,*J. Anal. Math. **74** (1998), 67–97.

[6] Hajlasz, P. and Koskela, P., *Sobolev met Poincare,* Mem. Amer. Math. Soc., **688** (2000).

[7] JERISON, D., *The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition,* Duke Math. J. **53** (1986), 503–523.

[8] LANCONELLI, E. *Stime subellittiche e metriche Riemanniane singolari,* Seminario di Analisi Matematica, Universita' di Bologna (A.A. 1982-83).

[9] LANCONELLI, E. AND MORBIDELLI, D., *On the Poincaré inequality for vector fields,* Ark. Mat. **38** (2000), 327–342.

[10] MAHEUX, P. AND SALOFF-COSTE, L., *Analyse sur le boules d'un opérateur sous-elliptique,* Math. Ann. **303** (1995), 713–746.

[11] MONTANARI, A. AND MORBIDELLI, D., *Sobolev and Morrey estimates for non-smooth Vector Fields of step two,* Z. Anal. Anwendungen, **21** (2002)1, 135-157.

[12] MONTANARI, A. AND MORBIDELLI, D., *Balls defined by nonsmooth vector fields and the Poincaré inequality,* preprint.

[13] MORBIDELLI, D., *Fractional Sobolev norms and structure of the Carnot–Carathéodory balls for Hörmander vector fields,* Studia Math. **139** (2000), 213–244.

[14] NAGEL, A., STEIN, E. M. AND WAINGER, S., *Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties,* Acta Math. **155** (1985), 103–147.

[15] RAMPAZZO, F. AND SUSSMAN, H. J., *Set-valued differential and a nonsmooth version of Chow's theorem,* Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control; Orlando, Florida, 2001.

[16] SALOFF-COSTE, L., *A note on Poincaré, Sobolev and Harnack inequalities,* Internat. Math. Res. Notices, 1992, no. 2, 27–38.

[17] VAROPOULOS, N. TH., SALOFF-COSTE, L. AND COULHON, T., *Analysis and geometry on groups,* Cambridge Tracts in Mathematics **100** Cambridge University Press, Cambridge, 1992.